12 Fe	bruary 2025	Stable	Matchie	· · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·
Plan		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·
× × × × ×	Stable Matching	Problem	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·
	Announcements	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·
	Gale - Shapley Al	gov ithm		

Problem Medical Residency Job Market.
* Doctors apply to Residency Programs.
* Doctors have preferences over Residencies La prestige, rigor, location, etc
* Residencies have preferences over Doctors Les grades, letters of rec, contributions to student body

•		rent Marke	et. Doctors vio	Salavies
	Decentral	ized / Asyv	nchronous	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · ·
 	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
	Doctor d	receives	offer from f	Residency r
· · · · · · · ·	Should	she acce	ept offer?	· · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	.       .	.       .		.       .
			<t< td=""><td>.       .</td></t<>	.       .
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		.       .	.       .
· · · · · · · · ·	.       .	.       .		.       .

Classic Employment Market * Residencies "bid" on Doctors via Salavies
A Residencies bid on Doctors via Salavies Decentralized / Asynchronous
If Doctor & receives offer from Residency r should she accept offer?
Leads to Negotiations / Strategizing
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Alternative: Matching	Market
* Doctors matched to	Residencies
L> Centralized /	
•	ing of Doctors <> Residencies
La No Negotiations	-
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	.       .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·       ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·       ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	·       ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Alternative: Matching Market \* Doctors matched to Residencies L> Centralized / Synchronous Outputs a "Matching" of Doctors <> Residencies Ly No Negotiations allowed Today's Simplifying Assumption \* Equal # of Dectors & Residencies + Every Residency hiring exactly one Doctor

Outputs a "Matching" of Doctors <> Residencies Defn. Given a collection of Doctors D, Residencies R a matching is a set of pairs M s.t. Le Every pair (d,r) EM consists of exactly one de D and one rER. () Every Doctor/Residency involved in at most one pair in M.

Defn Given a collection of Doctors D, Residencies R a matchille is a set of pairs M s.t. Les Eveny pair (d,r) EM consists of exactly one dED and one rER. ) Every Doctor/Residency involved in at most one pair in M.  $\partial_{\mathcal{C}} = \mathcal{O} + \mathcal{O$  $\mathcal{A}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\mathcal{A}} =$  $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \sum_{i$  $\partial_2$  i O i  $\mathcal{V}_2$  $\frac{1}{3}$ du O Vit Not a matching Matching

Defn Given a collection of Doctors D, Residencies R a matchille is a set of pairs M s.t. Le Every pair (d,r) EM consists of exactly one deb and one rER. ) Every Doctor / Residency involved in at most one pair in M. e e Reine e A perfect matching is a matching where  $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} = \mathcal{Y}_{\mathcal{A}} =$ every de D and veR  $\frac{\partial}{\partial 2} = O = \frac{\partial}{\partial 1} = O = \frac{\partial}{\partial 2} = O = \frac{\partial}{\partial 2} = \frac{\partial}$ one pair in M. δ<sub>v</sub> i O<sup>n</sup> i i v<sub>e</sub> Matchico

Alternative: Matching Market \* Doctors matched to Residencies L. Centralized / Synchronous - Outputs a "Matching" of Doctors <> Residencies La No Negotiations allowed But why would Doctors / Residencies agree to enter the market?

<u>Announcements</u> .
X HW 2 due
La Solutions Released ASAP ~ 12 noon.
X Prelim 1. Thurs 730 - 9p. L.S. A-D Statler 196 L.S. E-Z Statler 185
XEJ Shufdown
L Closing Discussions ~24hr prior to exam L Reopens After Feb Break
·       ·

Alternative: Matching Market \* Doctors matched to Residencies L. Centralized / Synchronous - Outputs a "Matching" of Doctors <> Residencies La No Negotiations allowed But why would Doctors / Residencies agree to enter the market?

Why	morly		Doctor	be upset	with	unctching ?
· · · · · · ·		· · · · · ·				
· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	.       .
· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	.       .
Why	 		Res; Lency	s be upset	$ \begin{array}{cccc} & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \end{array} $	matchila?
· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	  		· · · · · ·	.       .
.       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .       .         .	.       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .		.       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         . <td< td=""><td> </td><td> </td><td> </td></td<>			
						$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
  	  	· · · · · ·	.       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .       .         .       .       .       .       .       .       .       .       .       .       .	.       .	  	

Why would a Doctor be upset with including?
Doctor d'inctched to Residency V, but d'prefers r'to v
Why would a Residency be upset w/ matching?
Lo Doctor 2 matched to Residency V,
but v prefers d.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

* Suppose	Market	ortputs		and (1	
Defn, Inst J prefer V prefer					
		· · · · · · · ·			
		<ul> <li></li> <li></li> <li></li> <li></li> <li></li> <li></li></ul>	· · · · · · · · · ·	.       .	.       .
Marke Marke		· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·

X Suppose	Market ortput	(a + b) = (a + b) + (a +	
			f $f$ $f$ $f$ $f$ $f$ $f$ $f$ $f$ $f$
	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$
	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
Marke Marke	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	incenti incenti	e to reject tzhicg

Defn.	A perfect matching it contains no	instabilities:
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$d \in D$ $\forall v \in \mathcal{R}$	.       .
		match in M to V, OR
· · · · · · · ·	* V prefers	match in M to d
· · · · · · · ·		
· · · · · · · ·		
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		.       .
		.

Defn. A perfect matching no	instabilities:
$ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow $	<pre></pre>
	match in M to V, OR
* V prefers	match in Marto de
·       ·	
$\mathcal{A}_{1} \stackrel{\circ}{\underset{\circ}{\sim}} \mathcal{V}_{1} \stackrel{\circ}{\underset{\circ}{\rightarrow}} \mathcal{V}_{2} \stackrel{\circ}{\underset{\circ}{\rightarrow}} \mathcal{V}_{3} \stackrel{\circ}{\underset{\circ}{\rightarrow}} \mathcal{A}_{3} \stackrel{\circ}{\underset{\circ}{\rightarrow$	$O = V_1 : d_2 > d_1 > d_3$
$d_2$ , $v_2$ , $v_3$ , $v_3$ , $v_3$	$O \qquad k_2  d_3  \lambda  d_2  \lambda  d_1,$
$d_3: v_1 > v_3 > v_2 O$	$\mathcal{O} \qquad \mathcal{V}_{3} : \mathcal{A}_{1} > \mathcal{A}_{2} > \mathcal{A}_{3}$
	<pre></pre>

Defn. A perfect matching M is stable if it contains no instabilities:
VdeD VreR * d prefers match in M to r, OR * r prefers match in M to d
* When does a stable matching exist?
* If such a matching exists can we find it efficiently?
<ul> <li>· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·</li></ul>

Answer. A stable matching always exists! Theorem (Gale-Shapley) Fix a collection of Doctors D & Residencies R with any set of preferences. There is an efficient algorithm that returns a stable matching M between 

t dea .	
* Each	residency maintains list of Doctors
· · · · · · · · · · ·	according to their prefences.
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	$d_5 > d_3 > d_7 > d_7 > d_6 > d_2 > d_4$
· · · · · · · · · · ·	<pre>- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·</pre>
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Tdea.
* Each residency maintains list of Doctors according to their prefences.
* Iteratively make offers to next most - preferred doctor
$V_{\bullet} = \frac{d_5}{d_5} \times \frac{d_7}{d_7} \times \frac{d_6}{d_6} \times \frac{d_2}{d_2} \times \frac{d_4}{d_4}$
already made offers next most-preferred
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Gale-Shapley (D, R) Initialize M < While I rER that hasn't made offens to every dED X V makes offer to next most-preferred d Divitpute M

Gale-Shapley (D, R) Initialize M < While I reR that hasn't made offens to every deD X v makes offer to next most-preferred d if d is unmatched.  $\longrightarrow M \stackrel{\sim}{\leftarrow} M$ Output Ma

Gale - Shapley (D, R) Initialize M < While I reR that hasn't made offens to every deD X r makes offer to next most-preferred d if d is unmatched.  $\rightarrow M \leftarrow M \cup Z(d, v)$ else d is matched to some r'ER. if d prefers r to r  $M \leftarrow M \land Z(d, r') \neq U \neq (d, r')$ Ontput Man

Some Questions
* While loop termination: Does GS always return?
* Matching: is Ma perfect matching?
* Stability; is Mistable?
·       ·

•	•		) ) 0 '		_گ	•			u			, V	5V	ر_ل	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	· · ·	•	•
•	•	, X	•		V I		i Çl	e C	•	•	) (c	) ) )	r P V	•			e	V V		-  ( <i>י</i>	, V	· · · ·	-  - (	· • 0 •		•		•		) 2		S	•	r G	S	•	ol	,~~ ,~~	a	7 S	•	· · · ·	-e		l l l l l l l	ر مرکز مرکز	-
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	· •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	• •	• •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	· •	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	• • •		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	· · ·	•	•
•																																														•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•			•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •		•	•	•	•	•	• •	•	•
•	•	•	•	•	÷		•	•	•	•	•	•	0	•		0			0	•	•	0	÷	•	•	•	0 0	•	•	•	•		•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	• •		•

Some Qu	uestions.
* While	loop termination: Does GS always return?
$E = \frac{1}{2} W hill e = \frac{1}{2}$	rer that hasn't made offens to every ded
.     . <th>Every iteration involves offer from ver to NEW deD.</th>	Every iteration involves offer from ver to NEW deD.
.       .	

Some Questions
* While loop termination: Does GS always return?
While I rER that hasn't made offens to every ded
Every iteration involves offer from ver to NEW deb.
Iterations "indexed" by (v, 2) pairs
$\leq  R  \cdot  D  = n^2 $ iterations

Some Questions
* While loop termination: Does GS always return?
* Matching: is Ma perfect matching?
* Stability: is M stable?

Key Observation (\*) Once de D receives offer, d remains matched. If d is re-matched from (d, r) to (d, r)there v Z v if d is matched to some VER. if d prefers r to r  $\int d \Delta M d \ll M d \times Z (d, r') = \int (d, r') + \int (d, r')$ re-matched

	Antching: is Ma perfect matching?
Proof.	YES
· · · · · · ·	Terminated
· · · · · · ·	=> FreR made offer to every deD.
· · · · · · ·	
 	·       ·
· · · · · · ·	
 	·       ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

\* Matching: is Ma perfect matching? Proof GS Terminated => FreR made offer to every deD By Observation (\*) Every ded received offer => Every de D must be matched. > M is a perfect matching.

Some Questions
* While loop termination: Does GS always return?
* Matching: is Ma perfect matching?
* Stability; is M stable?
·       ·

* Stability 3	is M s	table ?	
Proof. Consider Need to show	any (d, Not an in	r), $(d', r')stability.$	

* Stability 3	is M stable	
Proof. Consider Need to show	1	
Suppose d preters		.       .
> V Never	made 2 an of	$f \sim r$
other	wise d'would be	material de mala reception
	a a contract of the contract o	least as preferred as r')
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	least as preferred as r)
	By Observation	least as preferred as r)
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	least as preferred as r)
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	least as preferred as r)
.       .	By Observation	least as preferred as r)
.       .	By Observation	(*) (*) (*)
.       .	By Observation	(*) (*)
<ul> <li></li></ul>	By Observation	(*) (*) (*)
<ul> <li></li></ul>	By Observation	(*) (*)
<ul> <li></li></ul>	By Observation	(*) (*) (*) (*) (*) (*) (*) (*)

* Stability: is M stable? YES!
Proof. Consider any $(d, r)$ , $(d', r') \in M$ . Need to show NOT an instability.
Suppose d prefers r'tor >> r'never made d an offer (otherwise d would be matched w/ r*eR at least as preferred as r')
=> r' prefers d' over d.
(Residencies make offers in order of preference, made offer to d, but not d.)

* Stability: is M stable? YES!
Proof. Consider any $(d, r)$ , $(d', r') \in M$ . Need to show NOT an instability.
Suppose d prefers r'tor > r'never made d an offer (otherwise d would be matched w/ r*eR at least as preferred as r')
=> r' prefers d' over d.
(Residencies make offers in order of preference, made offer to d', but not d.)
So $r' >_{a} r \implies d' >_{r} d$ No INSTABILITY.